2.3
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 74 – 76

Α΄ Ομάδας

1.i)
Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α(–2, 3) από την ευθεία x + y + 1 = 0.

Λύση

$$d = \frac{|1\cdot(-2)+1\cdot 3+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

1.ii)
Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α(–2, 3) από την ευθεία y = 2x – 3

Λύση

$y = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$

$$d = \frac{|2\cdot(-2)-1\cdot 3-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-4-3-3|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

1.iii)
Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α(–2, 3) από την ευθεία $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$

Λύση

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y = 6 \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

$$d = \frac{|3\cdot(-2)+2\cdot 3-6|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|-6+6-6|}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

1.iv)
Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α(–2, 3) από την ευθεία 5x +3y + 1 = 0

Λύση

$$d = \frac{|5\cdot(-2)+3\cdot 3+1|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{|-10+9+1|}{\sqrt{34}} = 0$$

2.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \ 5x - 8y - 51 = 0$ και $\varepsilon_2: \ 5x - 8y + 68 = 0$.

i) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις της αρχής των αξόνων από τις ε_1, ε_2.

iii) Να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

Λύση

(i)

$$\lambda_1 = -\frac{5}{-8} = \frac{5}{8} = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

(ii)

$$d(O,\ \varepsilon_1) = \frac{|5\cdot 0 - 8\cdot 0 - 51|}{\sqrt{5^2+8^2}} = \frac{51}{\sqrt{25+64}} = \frac{51}{\sqrt{89}} = \frac{51\sqrt{89}}{89}$$

$$d(O,\ \varepsilon_2) = \frac{|5\cdot 0 - 8\cdot 0 + 68|}{\sqrt{5^2+8^2}} = \frac{68}{\sqrt{25+64}} = \frac{68}{\sqrt{89}} = \frac{68\sqrt{89}}{89}$$

(iii)

Η ε_1, για $y = 0$, δίνει $x = \frac{51}{5}$. Άρα το σημείο $K\left(\frac{51}{5},\ 0\right) \in \varepsilon_1$.

$$d(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = d(K,\ \varepsilon_2) = \frac{\left|5\cdot\frac{51}{5} + 0\cdot 8 + 68\right|}{\sqrt{5^2+8^2}} = \frac{51+68}{\sqrt{25+64}} = \frac{119}{\sqrt{89}} = \frac{119\sqrt{89}}{89}$$

3.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \ 4x - 3y - 9 = 0$ και $\varepsilon_2: \ 4x - 3y - 24 = 0$.

i) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

ii) Να βρείτε ένα σημείο της ε_1 και στη συνέχεια να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2.

Λύση

(i)

$$\lambda_1 = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3} = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$

(ii)

Η ε_1, για $y = 0$, δίνει $x = \frac{9}{4}$. Άρα το σημείο $K\left(\frac{9}{4},\ 0\right) \in \varepsilon_1$.

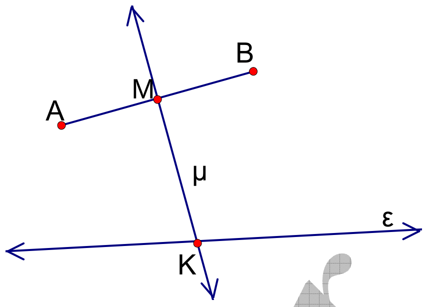
$$d(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2) = d(K,\ \varepsilon_2) = \frac{\left|4\cdot\frac{9}{4} - 3\cdot 0 - 24\right|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|9-24|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

4.

Ποιο σημείο της ευθείας $2x - 3y = 30$ ισαπέχει από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(7, 9)$

Λύση

Το ζητούμενο σημείο Κ θα ανήκει στη μεσοκάθετο μ του τμήματος ΑΒ.



$$\lambda_{AB} = \frac{9-3}{7-1} = 1$$

$\mu \perp AB \;\Rightarrow\; \lambda_\mu = -1.$

Έστω Μ το μέσο του ΑΒ.

Τότε $x_M = \dfrac{1+7}{2} = 4$ και $y_M = \dfrac{3+9}{2} = 6$

Εξίσωση της μεσοκαθέτου μ: $y - 6 = -1(x - 4)$

$y - 6 = -x + 4$

$x + y = 10$

Σύστημα των ε, μ : $\begin{cases} 2x-3y=30 \\ x+y=10 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 30 & -3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 30 + 30 = 60, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 30 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 30 = -10$$

$$x_K = \frac{D_x}{D} = \frac{D_x}{D} = \frac{60}{5} = 12 \quad \text{και} \quad y_K = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{5} = -2$$

το ζητούμενο σημείο είναι το $K(12, -2)$

5.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ και απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 5 μονάδες.

Λύση

Έστω ε: $y = -3x + \beta \;\Leftrightarrow\; 3x + y - \beta = 0$ η ζητούμενη ευθεία.

$$d(O, \varepsilon) = 5 \;\Leftrightarrow\; \frac{|3\cdot 0 + 1\cdot 0 + \beta|}{\sqrt{3^2+1^2}} = 5$$

$$\frac{|\beta|}{\sqrt{10}} = 5$$

$$|\beta| = 5\sqrt{10} \;\Leftrightarrow\; \beta = \pm 5\sqrt{10}$$

Άρα ε: $y = -3x + 5\sqrt{10}$ ή $y = -3x - 5\sqrt{10}$

6.

Η ευθεία $\varepsilon: \; 3x - 2y + 1 = 0$ είναι μεσοπαράλληλη δύο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2, που απέχουν 8 μονάδες. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών αυτών.

Λύση

Οι ζητούμενες ευθείες θα έχουν εξίσωση της μορφής $3x - 2y + \beta = 0$.

Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο τους.

Θα είναι $d(M, \varepsilon) = 4 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{|x \cdot 3 - y \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 4$

$$|3x - 2y + 1| = 4\sqrt{13}$$

$$3x - 2y + 1 = 4\sqrt{13} \quad \text{ή} \quad 3x - 2y + 1 = -4\sqrt{13}$$

$$3x - 2y + 1 - 4\sqrt{13} = 0 \quad \text{ή} \quad 3x - 2y + 1 + 4\sqrt{13} = 0$$

7.i)

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $\Gamma(4, 3)$

Λύση

$\overrightarrow{AB} = (6 - 0,\; 0 - 0) = (6, 0)$, $\quad \overrightarrow{A\Gamma} = (4 - 0,\; 3 - 0) = (4, 3)$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|18| = 9$$

7.ii)

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(-2, 4)$, $B(2, -6)$, $\Gamma(5, 4)$

Λύση

$\overrightarrow{AB} = (2 + 2,\; -6 - 4) = (4, -10)$, $\quad \overrightarrow{A\Gamma} = (5 + 2,\; 4 - 4) = (7, 0)$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|70| = 35$$

7.iii)

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $\Gamma(-5, -4)$

Λύση

$\overrightarrow{AB} = (3 - 1,\; 4 - 2) = (2, 2)$, $\quad \overrightarrow{A\Gamma} = (-5 - 1,\; -4 - 2) = (-6, -6)$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|0| = 0$$

8.

Δίνονται τα σημεία $A(5, 1)$ και $B(1, 3)$. Να βρείτε το σημείο M του άξονα $x'x$, για το οποίο το εμβαδόν του τριγώνου MAB να είναι ίσο με 7.

Λύση

Έστω $M(x, 0)$ το ζητούμενο σημείο.

$\overrightarrow{AB} = (1 - 5, 3 - 1) = (-4, 2)$

$\overrightarrow{AM} = (x - 5, 0 - 1) = (x - 5, -1)$

$$(MAB) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)\right| = 7$$

$$\left|\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ x-5 & -1 \end{vmatrix}\right| = 14$$

$$|4 - 2x + 10| = 14$$

$$|14 - 2x| = 14$$

$$14 - 2x = 14 \quad ή \quad 14 - 2x = -14$$

$$2x = 0 \quad ή \quad 2x = 28$$

$$x = 0 \quad ή \quad x = 14$$

Το ζητούμενο σημείο είναι $M(0, 0)$ ή $M(14, 0)$

9.

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(5, -2)$. Να βρείτε το σημείο M τέτοιο, ώστε $MA = MB$ και $(MAB) = 10$.

Λύση

Έστω $M(x, y)$ το ζητούμενο σημείο.

$\overrightarrow{AB} = (5-3,\ -2-4) = (2,\ -6)$

$\overrightarrow{AM} = (x-3,\ y-4)$

$$MA = MB \Leftrightarrow (MA)^2 = (MB)^2$$

$$(3-x)^2 + (4-y)^2 = (5-x)^2 + (-2-y)^2$$

$$9 - 6x + x^2 + 16 - 8y + y^2 = 25 - 10x + x^2 + 4 + 4y + y^2$$

$$4x - 12y = 4$$

$$x - 3y = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$(MAB) = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)\right| = 10$$

$$\left|\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ x-3 & y-4 \end{vmatrix}\right| = 20$$

$$|2y - 8 + 6x - 18| = 20$$

$$|2y + 6x - 26| = 20$$

$$|3x + y - 13| = 10$$

$$3x + y - 13 = 10 \quad \text{ή} \quad 3x + y - 13 = -10$$

$$3x + y = 23 \quad \textbf{(2)} \quad \text{ή} \quad 3x + y = 3 \quad \textbf{(3)}$$

- Σύστημα των (1), (2) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 3x+y=23 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 = 10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 23 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 69 = 70, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 23 \end{vmatrix} = 23 - 3 = 20$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{70}{10} = 7 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

- Σύστημα των (1), (3) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 3x+y=3 \end{cases}$ (0μοίως) $\Leftrightarrow$ $x = 1,\ \ y = 0$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι $M(7, 2)$ ή $M(1, 0)$

10.

Ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ οι τρεις κορυφές του έχουν συντεταγμένες $(-3, 1)$, $(-2, 3)$ και $(4, -5)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

Λύση

Έστω $Α(-3, 1)$, $Β(-2, 3)$ και $Γ(4, -5)$.

$\overrightarrow{ΑΒ} = (-2 + 3,\ 3 - 1) = (1, 2)$

$\overrightarrow{ΑΓ} = (4 + 3,\ -5 - 1) = (7,\ -6)$

$$(ΑΒΓΔ) = 2(ΑΒΓ) = 2\cdot\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΑΓ}\right)\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\right| = |-6-14| = 20$$

Β΄ Ομάδας

1.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισαπέχει από τα σημεία $Α(-2, 0)$ και $Β(0, 2)$.

Λύση

Η ζητούμενη ευθεία ε θα έχει εξίσωση $x = 0$ ή $y = λx$, $λ \in \mathbb{R}$.

- Όταν $ε:\ x = 0$.
  Ελέγχουμε αν τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από την ε.
  Είναι $d(Α, ε) = 2$ και $d(Β, ε) = 0$.
  Άρα η ευθεία $x = 0$ δεν αποτελεί λύση του προβλήματος.

- Όταν $ε:\ y = λx \Leftrightarrow λx - y = 0$

  $$d(Α, ε) = d(Β, ε) \Leftrightarrow \frac{|λ(-2)|}{\sqrt{λ^2+1^2}} = \frac{|-1\cdot 2|}{\sqrt{λ^2+1^2}}$$

  $$|2λ| = 2$$

  $$λ = 1 \quad ή \quad λ = -1$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι $y = x$ ή $y = -x$

2.

Να βρείτε το σημείο του άξονα $x'x$, το οποίο ισαπέχει από την αρχή των αξόνων O και από την ευθεία $5x + 12y - 60 = 0$.

Λύση

Έστω $A(\alpha, 0)$ το ζητούμενο σημείο.

Θα έχουμε $$|\alpha| = \frac{|5\alpha + 12\cdot 0 - 60|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$|\alpha| = \frac{|5\alpha + 12\cdot 0 - 60|}{13}$$

$$13|\alpha| = |5\alpha - 60|$$

$5\alpha - 60 = 13\alpha$ ή $5\alpha - 60 = -13\alpha$

$8\alpha = -60$ ή $18\alpha = 60$

$\alpha = -\frac{15}{2}$ ή $\alpha = \frac{10}{3}$

Άρα $A(-\frac{15}{2}, 0)$ ή $A(\frac{10}{3}, 0)$

3.
Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M(1, 2)$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E = 4$.

Λύση

Η ζητούμενη ευθεία ε, αφού διέρχεται από το σημείο $M(1, 2)$ θα έχει εξίσωση

$x = 1$ ή $y - 2 = \lambda(x - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **(1)**

Η $x = 1$ αποκλείεται, αφού είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, άρα δε σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

Επίσης, $\lambda = 0$ αποκλείεται, αφού η ευθεία θα είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Για $x = 0$, η (1) $\Rightarrow$ $y - 2 = -\lambda$ $\quad y = 2 - \lambda$.

Άρα η ε θα τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο $K(0, 2 - \lambda)$

Για $y = 0$, η (1) $\Rightarrow$ $-2 = \lambda x - \lambda$ $\quad \lambda x = \lambda - 2$ $\quad x = \dfrac{\lambda - 2}{\lambda}$.

Άρα η ε θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο $\Lambda(\dfrac{\lambda-2}{\lambda}, 0)$

$$E = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OK)(O\Lambda) = 4 \Leftrightarrow |2-\lambda|\left|\frac{\lambda-2}{\lambda}\right| = 8$$

$$\frac{(\lambda-2)^2}{|\lambda|} = 8$$

$$(\lambda-2)^2 = 8|\lambda|$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 8\lambda \quad ή \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = -8\lambda$$

$$\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0 \quad ή \quad \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

- $\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$

  $\Delta = 144 - 16 = 128$ $\qquad \lambda = \dfrac{12 \pm \sqrt{128}}{2} = 6 \pm \sqrt{32}$

- $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

  $\Delta = 16 - 16 = 0$ $\qquad \lambda = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{4}{2} = -2$

Άρα ε: $y - 2 = (6 \pm \sqrt{32})(x - 1)$ ή $y - 2 = -2(x - 1)$

$y = (6 \pm \sqrt{32})x - 4 \mp 4\sqrt{2}$ ή $y = -2x + 4$

4.

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο και απέχουν από το σημείο Α(–1, 3) απόσταση ίση με 1.

Λύση

Η ζητούμενη ευθεία ε, αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα έχει εξίσωση $x = 0$ ή $y = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}$. **(1)**

- Όταν ε : $x = 0$

$d(A, \varepsilon) = \dfrac{|1.(-1)+0+0|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 1$, άρα η ευθεία $x = 0$ είναι λύση του προβλήματος.

- Όταν ε : $y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$

$$d(A, \varepsilon) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda.(-1)-1.3+0|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}} = 1$$

$$|\lambda+3| = \sqrt{\lambda^2+1}$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = \lambda^2 + 1$$

$$6\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

Άρα ε : $y = -\dfrac{4}{3}x$

5.

Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $x - y + 2 = 0$ τα οποία απέχουν από την ευθεία $12x - 5x + 60 = 0$ απόσταση ίση με 1.

Λύση

Η δοσμένη ευθεία $x - y + 2 = 0$ γράφεται $y = x + 2$.

Έστω, λοιπόν, $A(\alpha, \alpha + 2)$ το ζητούμενο σημείο της. Τότε θα έχουμε

$$\frac{|12\alpha-5(\alpha+2)+60|}{\sqrt{12^2+5^2}} = 1 \Leftrightarrow |12\alpha-5\alpha-10+60| = \sqrt{169} = 13$$

$$|7\alpha+50| = 13$$

$$7\alpha + 50 = 13 \quad ή \quad 7\alpha + 50 = -13$$

$$7\alpha = -37 \quad ή \quad 7\alpha = -63$$

$$\alpha = -\frac{37}{7} \quad ή \quad \alpha = -9$$

Άρα $\alpha + 2 = -\dfrac{37}{7} + 2 = -\dfrac{23}{7}$ ή $-9 + 2 = -7$.

Επομένως $A\left(-\dfrac{37}{7},\ -\dfrac{23}{7}\right)$ ή $A(-9,\ -7)$

6.

Να δείξετε ότι τα σημεία $Α(α, β)$, $Β(γ, δ)$ και $Γ(α – γ, β – δ)$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν $αδ = βγ$

Λύση

$\overrightarrow{ΑΒ} = (γ – α, δ – β)$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = (α – γ – α, β – δ – β) = (–γ, –δ)$

Α, Β, Γ συνευθειακά $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{ΑΒ} \parallel \overrightarrow{ΑΓ}$

$$\begin{vmatrix} γ-α & δ-β \\ -γ & -δ \end{vmatrix} = 0$$

$$-γδ + αδ + γδ – γβ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad αδ = βγ$$

7.

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$, με $\alpha, \beta \neq 0$. Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει τους άξονες στα σημεία $P(p, 0)$ και $Q(0, q)$, να δείξετε ότι :

i) $\alpha q + \beta p = 2pq$ **ii)** $\alpha p + \beta q = 0$

Στη συνέχεια να εκφράσετε τα p και q συναρτήσει των α και β.

Λύση

$P(p, 0) \in$ στη μεσοκάθετο του $AB \Rightarrow$ $(PA) = (PB)$

$$(PA)^2 = (PB)^2$$
$$(\alpha - p)^2 + (0-0)^2 = (0-p)^2 + (\beta - 0)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha p + p^2 = p^2 + \beta^2$$
$$2\alpha p = \alpha^2 - \beta^2 \qquad \textbf{(1)}$$
$$p = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

$Q(0, q) \in$ στη μεσοκάθετο του $AB \Rightarrow$ $(QA) = (QB)$

$$(QA)^2 = (QB)^2$$
$$(\alpha - 0)^2 + (0-q)^2 = (0-0)^2 + (\beta - q)^2$$
$$\alpha^2 + q^2 = \beta^2 - 2\beta q + q^2$$
$$2\beta q = -(\alpha^2 - \beta^2) \qquad \textbf{(3)}$$
$$q = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} \qquad \textbf{(4)}$$

$(1) + (3) \Rightarrow 2\alpha p + 2\beta q = 0 \Rightarrow \alpha p + \beta q = 0$

$$\alpha q + \beta p = 2pq \overset{(3),(4)}{\Leftrightarrow} -\alpha\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta} + \beta\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha} = -2\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha}\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta}$$

$$\frac{-\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta}$$

$-\alpha^2 + \beta^2 = -\alpha^2 + \beta^2$ που ισχύει.

8.

Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $3x - 4y + 1= 0$ και $5x + 12y + 4 = 0$.

Λύση

Ας είναι ε_1, ε_2 οι δύο ευθείες.

Έστω $M(x, y)$ το τυχαίο σημείο των διχοτόμων $\Leftrightarrow$

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

$$\frac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|5x+12y+4|}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$\frac{|3x-4y+1|}{5} = \frac{|5x+12y+4|}{13}$$

$$13|3x-4y+1| = 5|5x+12y+4|$$

$$13(3x - 4y + 1) = 5(5x + 12y + 4) \quad \text{ή} \quad 13(3x - 4y + 1) = -5(5x + 12y + 4)$$

$$39x - 52y + 13 = 25x + 60y + 20 \quad \text{ή} \quad 39x - 52y + 13 = -25x - 60y - 20$$

$$14x - 112y - 7 = 0 \quad \text{ή} \quad 64x + 8y + 33 = 0$$

$$2x - 16y - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 64x + 8y + 33 = 0$$

9.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x - y + 1 = 0$ και $2x - 3y + 5 = 0$ και απέχει από το σημείο $A(3, 2)$ απόσταση ίση με $\frac{7}{5}$.

Λύση

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών, για να έχουμε το σημείο τομής τους K.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 2 = -3$$

$$x_K = \frac{D_x}{D} = 2 \quad \text{και} \quad y_K = \frac{D_y}{D} = 3. \qquad \text{Άρα } K(2, 3)$$

Η ζητούμενη ευθεία ε, αφού διέρχεται από το σημείο $K(2, 3)$ θα έχει εξίσωση $x = 2$ ή $y - 3 = \lambda(x - 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **(1)**

- Όταν $\varepsilon: x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$

$$d(A, \varepsilon) = \frac{|1\cdot 3 + 0\cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0}} = 1 \neq \frac{7}{5},$$

άρα η ευθεία $x = 2$ δεν αποτελεί λύση του προβλήματος

- Όταν $\varepsilon: y - 3 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y - 3 = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow -\lambda x + y + 2\lambda - 3 = 0$

$$d(A, \varepsilon) = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{|-\lambda\cdot 3 + 2 + 2\lambda - 3|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{|-\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = \frac{7}{5}$$

$$5|\lambda + 1| = 7\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$25(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 49(\lambda^2 + 1)$$

$$25\lambda^2 + 50\lambda + 25 = 49\lambda^2 + 49$$

$$24\lambda^2 - 50\lambda + 24 = 0$$

$$12\lambda^2 - 25\lambda + 12 = 0$$

$$\Delta = 625 - 576 = 49, \qquad \lambda = \frac{25 \pm 7}{24} = \frac{32}{24} \text{ ή } \frac{18}{24} = \frac{4}{3} \text{ ή } \frac{3}{4}$$

Άρα ε: $-\frac{4}{3}x + y + 2.\frac{4}{3} - 3 = 0$ ή $-\frac{3}{4}x + y + 2.\frac{3}{4} - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$-4x + 3y + 8 - 9 = 0$ ή $-3x + 4y + 6 - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$-4x + 3y - 1 = 0$ ή $-3x + 4y - 6 = 0$

10.

Δίνονται τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3, 1)$. Να βρείτε το σύνολο των σημείων M, για τα οποία ισχύει $(MAB) = 8$

Λύση

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο για το οποίο ισχύει $(MAB) = 8$

$\overrightarrow{AM} = (x + 1, y + 2)$, $\overrightarrow{AB} = (3 + 1, 1 + 2) = (4, 3)$

$$(MAB) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = 8$$

$$\left|\begin{vmatrix} x+1 & y+2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right| = 16$$

$$|3x + 3 - 4y - 8| = 16$$

$$|3x - 4y - 5| = 16$$

$$3x - 4y - 5 = 16 \quad ή \quad 3x - 4y - 5 = -16$$

$$3x - 4y - 21 = 0 \quad ή \quad 3x - 4y + 11 = 0$$